

Tema 2

Problemas

Alfonso V. Ramallo

[1] Sean A y B dos operadores hermiticos.

a) ¿Es $[A, B]$ hermitico?.

b) Sea α un numero complejo. ¿Para que valores de α es $e^{\alpha A}$ un operador unitario?.

Solucion

a) Calculemos el hermitico conjugado del conmutador de A y B teniendo en cuenta que $A^\dagger = A$ y $B^\dagger = B$:

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB$$

Es decir

$$[A, B]^\dagger = -[A, B],$$

y, por consiguiente, $[A, B]$ no es hermitico en general. Solo lo es si A y B conmutan.

b) Calculemos el hermitico y el inverso de $e^{\alpha A}$:

$$(e^{\alpha A})^\dagger = e^{\alpha^* A^\dagger} = e^{\alpha^* A}, \quad (e^{\alpha A})^{-1} = e^{-\alpha A}.$$

Solo son iguales, y por lo tanto $e^{\alpha A}$ es unitario, si $\alpha^* = -\alpha$, es decir cuando α es un numero imaginario puro, es decir $\alpha = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

[2] a) Demuéstrese la desigualdad triangular

$$\|(|\phi\rangle + |\chi\rangle)\| \leq \|\phi\| + \|\chi\|.$$

b) Muéstrese también que:

$$\|(|\phi\rangle + |\chi\rangle)\|^2 + \|(|\phi\rangle - |\chi\rangle)\|^2 = 2(\|\phi\|^2 + \|\chi\|^2).$$

Solucion

a) Demostremos la desigualdad triangular. Para ello calculemos la norma del vector $|\phi\rangle + |\chi\rangle$:

$$\begin{aligned} \|(|\phi\rangle + |\chi\rangle)\|^2 &= (\langle\phi| + \langle\chi|)(|\phi\rangle + |\chi\rangle) = \langle\phi|\phi\rangle + \langle\chi|\chi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle + \langle\chi|\phi\rangle = \\ &= \|\phi\|^2 + \|\chi\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle\phi|\chi\rangle) , \end{aligned}$$

donde en el ultimo paso hemos utilizado la propiedad de hermiticidad del producto ($\langle\chi|\phi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle^*$). Puesto que la parte real de un numero es siempre menor o igual que su modulo:

$$\operatorname{Re}(\langle\phi|\chi\rangle) \leq |\langle\phi|\chi\rangle| ,$$

podemos escribir la desigualdad:

$$\|(|\phi\rangle + |\chi\rangle)\|^2 \leq \|\phi\|^2 + \|\chi\|^2 + 2|\langle\phi|\chi\rangle| .$$

Segun la desigualdad de Schwartz $|\langle\phi|\chi\rangle| \leq \|\phi\| \|\chi\|$, por lo que podemos escribir:

$$\|(|\phi\rangle + |\chi\rangle)\|^2 \leq \|\phi\|^2 + \|\chi\|^2 + 2\|\phi\| \|\chi\| = (\|\phi\| + \|\chi\|)^2 .$$

Tomando la raiz cuadrada obtenemos el resultado buscado.

b) El resultado se demuestra por calculo directo:

$$\|(|\phi\rangle + |\chi\rangle)\|^2 = \langle\phi|\phi\rangle + \langle\chi|\chi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle + \langle\chi|\phi\rangle$$

$$\|(|\phi\rangle - |\chi\rangle)\|^2 = \langle\phi|\phi\rangle + \langle\chi|\chi\rangle - \langle\phi|\chi\rangle - \langle\chi|\phi\rangle$$

Sumando estas dos ecuaciones tenemos:

$$\|(|\phi\rangle + |\chi\rangle)\|^2 + \|(|\phi\rangle - |\chi\rangle)\|^2 = 2\langle\phi|\phi\rangle + 2\langle\chi|\chi\rangle = 2(\|\phi\|^2 + \|\chi\|^2) ,$$

que es lo que queriamos demostrar.

[3] A es un operador en un espacio de Hilbert de 2 dimensiones que tiene como autovalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ y como autovectores:

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} , \quad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} .$$

Encuéntrese A .

Solucion

La representacion espectral del operador A es:

$$A = \lambda_1 |\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| + \lambda_2 |\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = -|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| + 3|\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| .$$

Para obtener A en forma matricial, calculemos los productos externos de los autovectores:

$$|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} (-1, -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$|\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1, -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} .$$

Usando estos resultados, obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} .$$

[4] Sea $A(\lambda)$ un operador que depende de un parámetro λ . Demuéstrese que

$$\frac{dA^{-1}}{d\lambda} = -A^{-1} \frac{dA}{d\lambda} A^{-1} .$$

Solucion

Derivemos respecto de λ la relacion $AA^{-1} = I$:

$$\frac{dA}{d\lambda} A^{-1} + A \frac{dA^{-1}}{d\lambda} = 0 .$$

Multiplicando por A^{-1} por la izquierda esta ultima relacion, obtenemos:

$$A^{-1} \frac{dA}{d\lambda} A^{-1} + \frac{dA^{-1}}{d\lambda} = 0 ,$$

que es la ecuacion que queriamos demostrar.

[5] Sea A un operador. Demuestrese que el inverso de e^A es:

$$[e^A]^{-1} = e^{-A} .$$

Solucion

Hemos de probar que $e^A e^{-A} = 1$. Escribamos las dos series correspondientes a e^A y e^{-A} :

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots , \quad e^{-A} = 1 - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \dots .$$

Si las multiplicamos tenemos:

$$e^A e^{-A} = \left[1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right] \left[1 - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \dots \right] .$$

Estudiemos las diversas potencias de A en el segundo miembro de esta ultima ecuacion. El termino A^0 es 1. El termino lineal es $A - A = 0$. El termino cuadratico es $\frac{A^2}{2!} + \frac{A^2}{2!} - A^2 = 0$. En general el termino A^n es

$$\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{(-A)^{n-k}}{(n-k)!} = A^n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} .$$

Para calcular el coeficiente de A^n recordemos la formula del binomio de Newton para $x, y \in \mathbb{C}$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} .$$

Tomemos $x = 1$, $y = -1$ y tomemos $n > 0$. Entonces la formula del binomio nos da:

$$0 = (1 - 1)^n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} .$$

Asi pues:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} = \delta_{n,0} .$$

Por lo tanto, el coeficiente de A^n en $e^A e^{-A}$ es cero excepto para $n = 0$ que vale 1. Es decir:

$$e^A e^{-A} = 1 .$$

De forma similar se prueba que $e^{-A} e^A = 1$, lo que completa la demostración de que e^{-A} es el inverso de e^A .

[6] Sean A y B dos operadores que conmutan entre sí. Pruebase que:

$$e^A e^B = e^{A+B} .$$

Solución

Multipliquemos las series de potencias de e^A y e^B :

$$e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} A^n B^m ,$$

donde hemos usado el hecho que A y B conmutan entre sí. Substituyamos ahora el índice m de la suma por un nuevo índice j , definido como:

$$j = n + m \quad \implies \quad m = j - n .$$

Entonces, el producto de las exponenciales toma la forma:

$$e^A e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^j \frac{A^n B^{j-n}}{n! (j-n)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} A^n B^{j-n} .$$

Utilizemos ahora la fórmula del binomio de Newton:

$$\sum_{n=0}^j \binom{j}{n} A^n B^{j-n} = (A + B)^j ,$$

que es válida porque $[A, B] = 0$. Substituyendo este resultado en la ecuación de $e^A e^B$, llegamos a:

$$e^A e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A + B)^j = e^{A+B} ,$$

tal como queríamos demostrar.

[7] Demuéstrese la siguiente expresión (Baker-Campbell-Hausdorff)

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots + \frac{1}{n!}[A, \dots [A, B] \dots] + \dots .$$

Solucion

Definamos el operador:

$$T(s) = e^{sA} B e^{-sA} .$$

Escribamos la expansion en serie de Taylor de $T(s)$ en torno a $s = 0$:

$$T(s) = e^{sA} B e^{-sA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n T}{ds^n} \right|_{s=0} s^n .$$

Para obtener esta serie, calculemos la primera derivada de $T(s)$. Teniendo en cuenta que A conmuta con $e^{\pm sA}$, llegamos a:

$$\frac{dT}{ds} = A e^{sA} B e^{-sA} - e^{sA} B e^{-sA} A = AT(s) - T(s)A ,$$

es decir podemos escribir esta derivada como el siguiente conmutador:

$$\frac{dT}{ds} = [A, T(s)] .$$

Utilizando este resultado calculemos la segunda derivada de $T(s)$:

$$\frac{d^2 T}{ds^2} = \left[A, \frac{dT}{ds} \right] = [A, [A, T(s)]] .$$

En general la n -ésima derivada se obtiene haciendo n conmutadores iterados:

$$\frac{d^n T}{ds^n} = [A, \dots [A, T(s)] \dots] .$$

Así pues, la expansion de $T(s)$ en potencias de s es:

$$e^{sA} B e^{-sA} = B + [A, T(s=0)]s + \frac{1}{2}[A, [A, T(s=0)]]s^2 + \dots .$$

Teniendo en cuenta que:

$$T(s=0) = B , \quad \left. \frac{dT}{ds} \right|_{s=0} = [A, B] , \quad \left. \frac{d^2 T}{ds^2} \right|_{s=0} = [A, [A, B]] , \dots ,$$

obtenemos la formula buscada de Baker-Campbell-Hausdorff poniendo $s = 1$ en la serie de Taylor.

[8] Demuéstrese que si A, B son dos operadores tales que $[[A, B], A] = 0$, se verifica, para todo m entero positivo que $[A^m, B] = m A^{m-1}[A, B]$.

Solucion

Probemos el resultado por induccion en el exponente m de A . El resultado es trivial para $m = 1$. Supongamos que se verifica cuando el exponente de A es $m - 1$, es decir que:

$$[A^{m-1}, B] = (m - 1) A^{m-2} [A, B] .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} [A^m, B] &= [A \cdot A^{m-1}, B] = A [A^{m-1}, B] + [A, B] A^{m-1} = \\ &= A (m - 1) A^{m-2} [A, B] + [A, B] A^{m-1} = (m - 1) A^{m-1} [A, B] + [A, B] A^{m-1} . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, por hipotesis, $[A, B]$ y A conmutan, podemos agrupar los terminos de la expresion anterior y escribir:

$$[A^m, B] = m A^{m-1} [A, B] ,$$

que es lo que queriamos probar.

[9] Demuéstrese que si $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$, entonces se verifica la fórmula de Glauber:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{[A,B]/2} .$$

Solucion

Para demostrar la formula de Glauber definamos el siguiente operador dependiente de la variable real s :

$$T(s) \equiv e^{sA} e^{sB} .$$

Calculemos la derivada de $T(s)$:

$$\frac{dT}{ds} = A e^{sA} e^{sB} + e^{sA} B e^{sB} = AT(s) + e^{sA} B e^{sB} .$$

Reescribamos e^{sB} en el ultimo termino de esta ecuacion utilizando:

$$e^{sB} = e^{-sA} e^{sA} B e^{sB} = e^{-sA} T(s) .$$

Obtenemos:

$$\frac{dT}{ds} = AT(s) + e^{sA} B e^{-sA} T(s) .$$

Calculemos $e^{sA} B e^{-sA}$ utilizando la formula de Baker-Campbell-Hausdorff . Teniendo en cuenta que $[A, [A, B]] = 0$ la serie trunca a primer orden en s y se reduce a:

$$e^{sA} B e^{-sA} = B + s[A, B] .$$

Entonces, podemos escribir la derivada de $T(s)$ en la forma:

$$\frac{dT}{ds} = [A + B + s[A, B]] T(s) .$$

Esta ecuacion puede integrarse en la forma:

$$T(s) = e^{(A+B)s} e^{\frac{1}{2}[A,B]s^2} .$$

Verifiquemoslo derivando el segundo miembro de esta ultima ecuacion:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= (A + B) e^{(A+B)s} e^{\frac{1}{2}[A,B]s^2} + e^{(A+B)s} s [A, B] e^{\frac{1}{2}[A,B]s^2} = \\ &= [A + B + s[A, B]] T(s) , \end{aligned}$$

donde hemos usado que $[A, B]$ conmuta con $A + B$. Tomando $s = 1$ en la solucion que hemos obtenido para $T(s)$, llegamos a:

$$e^A e^B \equiv T(1) = e^{(A+B)} e^{\frac{1}{2}[A,B]} ,$$

que es lo que queriamos probar.

[10] Sea una matriz M , que viene dada por

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} .$$

Calcular los autovalores y autovectores. Calcúlese e^M y \sqrt{M} .

Solucion

Escribamos la ecuacion de autovalores para la matriz M :

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -i \\ i & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 ,$$

que es la siguiente ecuacion polinomica en λ de segundo orden:

$$(2 - \lambda)^2 = 1 ,$$

cuyas dos raices λ_1 y λ_2 son:

$$\lambda_1 = 1 , \quad \lambda_2 = 3 .$$

Sea $|u_1\rangle$ y $|u_2\rangle$ los autovectores correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente. Estos vectores satisfacen:

$$(M - \lambda_1 I) |u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$(M - \lambda_2 I) |u_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

que pueden resolverse como:

$$u_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad u_{12} = -\frac{i}{\sqrt{2}} , \quad u_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad u_{22} = \frac{i}{\sqrt{2}} ,$$

donde ya hemos tenido en cuenta las condiciones de normalizacion de $|u_1\rangle$ y $|u_2\rangle$. Asi pues:

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} , \quad |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} .$$

Dado que:

$$|u_1\rangle\langle u_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (1, i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$|u_2\rangle\langle u_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1, -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} ,$$

es facil verificar la formula de resolucion de la unidad y la representacion espectral de M :

$$I = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| , \quad M = |u_1\rangle\langle u_1| + 3|u_2\rangle\langle u_2| .$$

Utilizando la representacion espectral de M podemos obtener cuanto valen e^M y \sqrt{M} :

$$e^M = e^{\lambda_1} |u_1\rangle\langle u_1| + e^{\lambda_2} |u_2\rangle\langle u_2| , \quad \sqrt{M} = \sqrt{\lambda_1} |u_1\rangle\langle u_1| + \sqrt{\lambda_2} |u_2\rangle\langle u_2|$$

Mas explicitamente e^M es:

$$e^M = e^1 |u_1\rangle\langle u_1| + e^3 |u_2\rangle\langle u_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^3 & i(e - e^3) \\ -i(e - e^3) & e + e^3 \end{pmatrix}$$

Para calcular \sqrt{M} tengamos en cuenta que $\sqrt{\lambda_1} = \pm 1$ y que $\sqrt{\lambda_2} = \pm\sqrt{3}$. Utilizando estos valores obtenemos cuatro posibles resultados para \sqrt{M} :

$$\sqrt{M} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & i(1 - \sqrt{3}) \\ -i(1 - \sqrt{3}) & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} , \quad \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & i(1 + \sqrt{3}) \\ -i(1 + \sqrt{3}) & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

[11] Sean A y B dos matrices cuadradas arbitrarias. Demuestre que:

$$\det e^A = e^{\text{Tr} A} , \quad \det B = e^{\text{Tr} \ln B}$$

Solucion

Las dos ecuaciones son equivalentes, como se comprueba poniendo $B = e^A$ (y por lo tanto $\ln B = A$). Concentremos pues nuestros esfuerzos en la ecuacion de A . Observemos que la ecuacion es evidente si la matriz A es diagonal. En efecto, si λ_i son los autovalores de A , entonces e^A es tambien diagonal y sus elementos de la diagonal son e^{λ_i} . Entonces:

$$\det e^A = \prod_i e^{\lambda_i} = e^{\sum_i \lambda_i} = e^{\text{Tr} A} .$$

Para demostrar esta propiedad para una matriz A arbitraria, definamos la funcion:

$$f(t) \equiv \det e^{tA} , \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Veamos que $f(t)$ satisface la siguiente ecuacion diferencial:

$$\frac{df(t)}{dt} = (\text{Tr } A) f(t) .$$

Para ello, calculemos la derivada de $f(t)$ utilizando directamente la definicion de derivada:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon) - f(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det e^{(t+\epsilon)A} - \det e^{tA}}{\epsilon} .$$

Ahora bien:

$$e^{(t+\epsilon)A} = e^{tA} e^{\epsilon A} ,$$

y puesto que el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes, se tiene:

$$\det e^{(t+\epsilon)A} = \det e^{tA} \det e^{\epsilon A} .$$

Entonces:

$$\frac{df(t)}{dt} = \det e^{tA} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det e^{\epsilon A} - 1}{\epsilon} = f(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det e^{\epsilon A} - 1}{\epsilon} .$$

A primer orden en ϵ , se tiene:

$$\det e^{\epsilon A} = \det (1 + \epsilon A) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \epsilon \text{Tr } A + \mathcal{O}(\epsilon^2) ,$$

donde la primera igualdad se obtiene de la definicion de e^A en serie de Taylor. Comprobemos la segunda igualdad para una matriz 2×2 :

$$\begin{aligned} \det (1 + \epsilon A) &= \det \begin{pmatrix} 1 + \epsilon A_{11} & \epsilon A_{12} \\ \epsilon A_{21} & 1 + \epsilon A_{22} \end{pmatrix} = (1 + \epsilon A_{11})(1 + \epsilon A_{22}) - \epsilon^2 A_{12}A_{21} = \\ &= 1 + \epsilon (A_{11} + A_{22}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \epsilon \text{Tr } A + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \end{aligned}$$

Es claro que esta propiedad se verifica tambien para matrices cuadradas de tamaño arbitrario. Entonces:

$$\frac{\det e^{\epsilon A} - 1}{\epsilon} = \text{Tr } A + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \implies \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det e^{\epsilon A} - 1}{\epsilon} = \text{Tr } A ,$$

lo que demuestra la ecuacion diferencial satisfecha por $f(t)$. Esta ecuacion diferencial se integral trivialmente:

$$\frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = \frac{d \ln f(t)}{dt} = \text{Tr } A \quad \implies \quad f(t) = C e^{t \text{Tr } A} ,$$

siendo C una constante de integracion. De la definicion de $f(t)$ obtenemos:

$$f(0) = \det e^0 = \det I = 1 .$$

Ello implica que la constante C debe de ser $C = 1$ y por lo tanto:

$$f(t) = \det e^{tA} = e^{t \text{Tr} A} .$$

Tomando $t = 1$ en esta ecuacion, obtenemos la igualdad buscada:

$$\boxed{\det e^A = e^{\text{Tr} A}}$$

[12] Supongase que existe un operador A que tiene un autovector $|\psi\rangle$ con autovalor a . Supongase que existe otro operador B tal que:

$$[A, B] = B + 2BA^2 .$$

Demuestrese que $B|\psi\rangle$ es tambien un autovector de A y calculese el correspondiente autovalor.

Solucion

Supongamos que $|\psi\rangle$ es un autovector del operador A con autovalor a :

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle .$$

Sea $|\chi\rangle$ el vector:

$$|\chi\rangle = B|\psi\rangle .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A|\chi\rangle &= AB|\psi\rangle = ([A, B] + BA)|\psi\rangle = (B + 2BA^2 + BA)|\psi\rangle = \\ &= (B + 2a^2B + aB)|\psi\rangle = (1 + 2a^2 + a)B|\psi\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{A|\chi\rangle = (1 + 2a^2 + a)|\chi\rangle}$$

es decir $|\chi\rangle = B|\psi\rangle$ es un autovector de A con autovalor $1 + 2a^2 + a$.